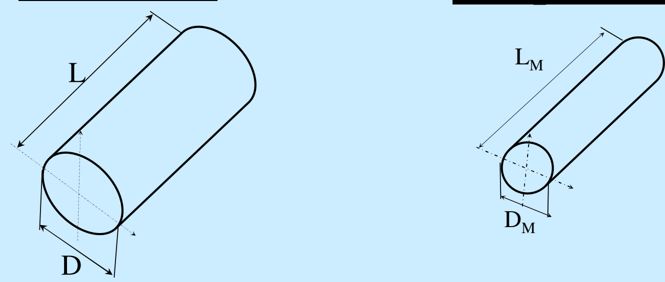
Chapitre 5
(≈ 4heures)

Analyse dimensionnelle et similitude

Plan du chapitre 5

Critères de similitude

Prototype **Maquette (M)**



❑ **Similitude géométrique:** (similitude des formes)

$$\frac{D_M}{D} = \frac{L_M}{L} = \kappa_G \qquad (1)$$

Constante de proportionnalité géométrique

❑ **Similitudes cinématique et dynamique:**

La similarité cinématique et dynamique sont les deux autres conditions à respecter avant de considérer que les deux écoulements soient similaires. Les paramètres cinématiques et dynamiques doivent avoir une certaine relation.

Comme dans le cas de la similitude géométrique (rapports de longueurs), on devra avoir une relation pour la force (F), la masse (m) et le temps (t).

- Force: $F_M = \kappa_F F$
- Masse: $m_M = \kappa_m m$ (2)
- Temps: $t_M = \kappa_t t$

κ_F, κ_m et κ_t sont respectivement les constantes de proportionnalité des forces, des masses et des temps.

À partir de ces expressions, on pourra obtenir tous les rapports d'échelle maquette/prototype pour n'importe quel paramètre **<u>cinématique</u>** ou **<u>dynamique</u>** et les propriétés des fluides:

- Vitesse: $V_M = \dfrac{\kappa_G}{\kappa_t} V$
- Accélération: $a_M = \dfrac{\kappa_G}{\kappa_t^2} a$
- Masse volumique: $\rho_M = \dfrac{\kappa_m}{\kappa_G^3} \rho$
- Pression: $p_M = \dfrac{\kappa_F}{\kappa_G^2} p$

(3)

La loi de Newton s'applique, qu'on travaille sur le prototype ou sur la maquette:

$$F = ma \quad \text{et} \quad F_M = m_M a_M \qquad (4)$$

En remplaçant F_M, m_M et a_M, des équations 2 et 3, on obtient:

$$\kappa_F F = (\kappa_m m)\left(\frac{\kappa_G}{\kappa_t^2} a\right) \qquad (5)$$

On divise ensuite par F le membre de gauche et par (ma) le membre de droite (puisque F = ma) :

$$\Rightarrow \quad \kappa_F = \frac{\kappa_m \kappa_G}{\kappa_t^2} \quad \text{ou} \quad 1 = \frac{\kappa_m \kappa_G}{\kappa_t^2 \kappa_F} \qquad (6)$$

Réarrangement de l'équation (6):

Multiplions et divisons l'équation (6) par κ_G^3: $\Longrightarrow 1 = \dfrac{\kappa_m \kappa_G^4}{\kappa_t^2 \kappa_G^3 \kappa_F}$

Séparation des termes: $\Longrightarrow 1 = \underbrace{\left(\dfrac{\kappa_m}{\kappa_G^3}\right)}\underbrace{\left(\dfrac{\kappa_G^2}{\kappa_t^2}\right)}\left(\dfrac{\kappa_G^2}{\kappa_F}\right)$

$\kappa_G{}^2$

$$1 = \frac{(\rho_M/\rho)(V_M^2/V^2)(L_M^2/L^2)}{F_M/F}$$

κ_F

$$\Rightarrow \boxed{\left.\frac{F}{\rho V^2 L^2}\right|_{\text{Maquette}} = \left.\frac{F}{\rho V^2 L^2}\right|_{\text{prototype}}} \qquad (7)$$

L'équation (7) donne la condition pour avoir une similarité dynamique entre le modèle et la maquette. Le paramètre adimensionnel ($F/\rho V^2 L^2$) doit être le même à des positions sur le prototype et sur la maquette géométriquement similaires.

a) Cas où les forces de gravité sont importantes:

La force de gravité F = mg est proportionnelle à $\rho L^3 g$. Si on remplace dans l'équation (7), on aura:

$$\left.\frac{\rho L^3 g}{\rho V^2 L^2}\right|_{\text{Maquette}} = \left.\frac{\rho L^3 g}{\rho V^2 L^2}\right|_{\text{prototype}}$$

En inversant et après simplification, on obtient:

$$\boxed{\left.\frac{V^2}{gL}\right|_{\text{Maquette}} = \left.\frac{V^2}{gL}\right|_{\text{prototype}}} \quad \text{Nombre de Froude (Fr)} \quad (8)$$

Donc, pour des problèmes où les forces de gravité sont importantes, le nombre de Froude doit être le même à des positions géométriquement similaires sur le prototype et sur la maquettes.

b) Cas où les forces de pression sont importantes:

La force de pression est $F = \Delta p L^2$. Si on remplace dans l'équation (7) on aura:

$$\left.\frac{\Delta p L^2}{\rho V^2 L^2}\right|_{\text{Maquette}} = \left.\frac{\Delta p L^2}{\rho V^2 L^2}\right|_{\text{prototype}}$$

En inversant et après simplification, on obtient:

$$\boxed{\left.\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}\right|_{\text{Maquette}} = \left.\frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho V^2}\right|_{\text{prototype}}} \quad \text{Nombre d'Euler (Eu)} \quad (9)$$

Donc, pour des problèmes où les forces de pression sont importantes, le nombre d'Euler doit être le même à des positions géométriquement similaires sur le prototype et sur la maquette.

c) Cas où les forces de viscosité sont importantes:

Pour des fluides Newtoniens: $\tau = -\mu(dV/dy)$.

La force de cisaillement est donnée par l'expression suivante:

$$F = \tau L^2 = -\mu \frac{dV}{dy} L^2 = -\mu \frac{\Delta V}{\Delta y} L^2$$

Donc F est proportionnelle à μVL.

En remplaçant F par μVL dans l'équation (7), on aura:

$$\left.\frac{\mu VL}{\rho V^2 L^2}\right|_{Maquette} = \left.\frac{\mu VL}{\rho V^2 L^2}\right|_{prototype}$$

En inversant et après simplification on obtient:

$$\boxed{\left.\frac{\rho VL}{\mu}\right|_{Maquette} = \left.\frac{\rho VL}{\mu}\right|_{prototype}} \qquad (10)$$

Nombre de Reynolds (Re)

Donc, pour des problèmes où les forces visqueuses sont importantes, le nombre de Reynolds doit être le même à des positions géométriquement similaires sur le prototype et sur la maquette.

Plan du chapitre 5

1. Introduction et définitions
2. Analyse dimensionnelle des équations de bilan:
   - Forme adimensionnelle des équations de continuité et de Navier-Stokes .
   - Critères de similitude.

→ 3. Théorème de Buckingham (Théorème de Π).

4. Exemples d'application.

Notion de dimension

❑ Les **grandeurs physiques** pour les systèmes isothermes sont exprimées en fonction des **trois grandeurs fondamentales**:

- La longueur: L
- Le temps : t (système: **M, L, t**)
- La masse : M

❑ On peut aussi choisir la force, **F**, à la place de la masse,**M**, comme grandeur fondamentale

- La longueur: L
- Le temps : t (système: **F, L, t**)
- La force : F

Symboles et dimensions des quantités courantes en mécanique des fluides

Quantité	Symbole	Dimensions	
		m L t	*F L t*
Longueur	L	L	L
Temps	t	T	T
Masse	m	M	FT^2L^{-1}
Force	F	MLT^{-2}	F
Moment, couple	C	ML^2T^{-2}	FL
Vitesse	V	LT^{-1}	LT^{-1}
Vitesse du son	$\boldsymbol{a}$	LT^{-1}	LT^{-1}
Accélération	a	LT^{-2}	LT^{-2}
Fréquence	ω	T^{-1}	T^{-1}
Accélération gravitationnelle	g	LT^{-2}	LT^{-2}
Surface	S ou A	L^2	L^2
Débit volumique	Q	L^3T^{-1}	L^3T^{-1}
Débit massique	$\dot{m}$ ou Q_m	MT^{-1}	FT^{-1}
Pression	p	$ML^{-1}T^{-2}$	$FL^{-1}T^{-2}$
Effort	τ	$ML^{-1}T^{-2}$	$FL^{-1}T^{-2}$
Masse volumique	ρ	ML^{-3}	FL^{-3}
Poids spécifique	γ	$ML^{-2}T^{-2}$	$FL^{-2}T^{-2}$
Viscosité dynamique	μ	$ML^{-1}T^{-1}$	$FL^{-1}T^{-1}$
Viscosité cinématique	ν	L^2T^{-1}	L^2T^{-1}
Travail, énergie	W	ML^2T^{-2}	FL^2T^{-2}
Puissance, transfert de chaleur	P, $\dot{Q}$	ML^2T^{-3}	FL^2T^{-3}
Tension de surface	σ	MT^{-2}	FT^{-2}
Module de dilatation	B	$ML^{-1}T^{-2}$	$FL^{-1}T^{-2}$

Théorème de Buckingham (Théorème π)

Selon le théorème de Buckingham (ou théorème π), dans un problème comprenant n grandeurs physiques où il y a m dimensions fondamentales, on peut réécrire ces grandeurs physiques en (n-m) paramètres adimensionnels indépendants.

$$\boxed{i = n - m}$$

i: Nombre de groupes adimensionnels nécessaires

m: Nombre de dimensions fondamentales

n: Nombre de grandeurs physiques

Théorème de Buckingham (suite)

Soient A_1, A_2, A_3,..., A_n les différentes grandeurs physiques: comme la vitesse, la pression, la viscosité, etc.

Entre toutes ces quantités, il y a une relation de la forme:

$$\phi(A_1, A_2, ..., A_n) = 0$$

Si Π_1, Π_2, Π_3, ..., représentent les quantités adimensionnelles parmi les quantités physiques A_1, A_2, A_3,..., A_n, on peut alors écrire une équation de la forme:

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, ..., \pi_{n-m}) = 0$$

ou $$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, ..., \pi_{n-m}) = 0$$

Les étapes de l'analyse dimensionnelle

Pour effectuer une analyse dimensionnelle, on doit considérer les neuf étapes suivantes:

1. Dresser la liste de toutes les quantités physiques A_i et leur dimension correspondante. Omettre toute quantité physique qui est une fonction directe d'une ou d'autres quantités physiques.

   Exemple: Si on a un écoulement dans un cylindre et qu'on a les paramètres Q, D et <V>, on doit omettre le débit volumique, Q, ou la vitesse moyenne, <V>, car $Q = \pi\langle V\rangle D^2/4$

2. Écrire la fonction

$$\phi(A_1, A_2, ..., A_n) = 0$$

3. Choisir les variables répétitives. Ces variables doivent contenir toutes les m dimensions du problème. Souvent, on retient une variable parce qu'elle déterminne l'échelle, une autre, parce qu'elle détermine les conditions cinématiques; il faut une variable liée avec la masse ou les forces du système.

   Exemple: on peut retenir D, V et ρ comme variables fondamentales.

Les étapes de l'analyse dimensionnelle

4. Écrire les paramètres π en fonction des exposants inconnus:

$$\pi_1 = V^{x_1} D^{y_1} \rho^{z_1} \mu = \left(Lt^{-1}\right)^{x_1} L^{y_1} \left(ML^{-3}\right)^{z_1} \left(ML^{-1}t^{-1}\right) = M^0 L^0 t^0$$

   S'assurer que toutes les quantités A_i sont incluses dans les groupes π_i.

5. Écrire les équations des paramètres π pour les exposants; on doit obtenir une somme algébrique nulle pour chaque dimension.

6. Résoudre les équations simultanément.

7. Remplacer les exposants trouvés (x_1, y_1, z_1,...) dans les expressions de π (étape 4) pour obtenir les paramètres π sans dimension.

Les étapes de l'analyse dimensionnelle

8. Déterminer la fonction:

$$f(\pi_1, \pi_2, \pi_3, ..., \pi_{n-m}) = 0$$

   ou résoudre une valeur explicite de:

$$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, ..., \pi_{n-m})$$

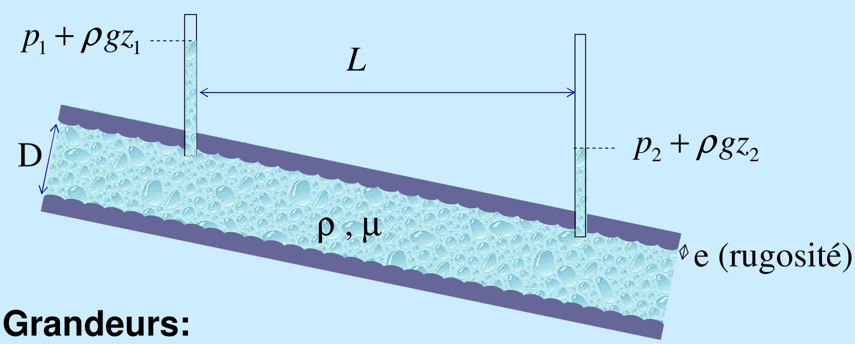
   S'assurer que tous les paramètres π_i sont indépendants les uns des autres.

9. Mettre les résultats sous la forme de nombres sans dimension connus (Re, Fr, Eu, etc.).

Plan du chapitre 5

1. Introduction et définitions
2. Analyse dimensionnelle des équations de bilan:
   - Forme adimensionnelle des équations de continuité et de Navier-Stokes .
   - Critères de similitude.
3. Théorème de Buckingham (Théorème de Π).
4. Exemples d'application.

Écoulement dans une conduite cylindrique rugueuse



Grandeurs:

Géométriques : D, e, L

Physiques : ρ, μ

Cinématiques et dynamiques: V, Δp

L'expérience montre que pour l'écoulement dans une conduite:

$$\Delta P/L = f\left(D, Q, \text{ou}\langle V\rangle, \rho, \mu, e\right)$$

où:

- $\Delta P/L$: Perte de charge par unité de longueur
- D : Diamètre de la conduite
- <V> : Vitesse moyenne (ou Q: Débit volumique)
- ρ et μ : Masse volumique et viscosité dynamique.
- e : Rugosité moyenne de la conduite

Question:

En utilisant le théorème π, on vous demande de proposer une forme pour présenter les résultats expérimentaux en fonction de paramètres adimensionnels.

Inventaire des variables:

Variable	Symbole	Dimensions (MLt)
Perte de charge	ΔP	$ML^{-1}t^{-2}$
Vitesse	$\langle V \rangle$	Lt^{-1}
Diamètre	D	L
Longueur	L	L
Rugosité	e	L
Viscosité	μ	$ML^{-1}t^{-1}$
Masse volumique	ρ	ML^{-3}

On a 7 quantités avec trois dimensions (MLt). On trouve donc (7 – 3 = 4) paramètres π, soient:

$$\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3 \text{ et } \Pi_4$$

Si on prend <V>, D et ρ comme variables qui se répètent (car les trois contiennent les dimensions fondamentales MLt).

Les nombres Π qu'on peut former sont les suivants:

$$\begin{cases} \pi_1 = <V>^{x_1} D^{y_1} \rho^{z_1} \Delta P = M^0 L^0 t^0 \\ \pi_2 = <V>^{x_2} D^{y_2} \rho^{z_2} L = M^0 L^0 t^0 \\ \pi_3 = <V>^{x_3} D^{y_3} \rho^{z_3} e = M^0 L^0 t^0 \\ \pi_4 = <V>^{x_4} D^{y_4} \rho^{z_4} \mu = M^0 L^0 t^0 \end{cases}$$

Les nombres Π qu'on peut former sont les suivants:

$$\begin{cases} \pi_1 = \left(Lt^{-1}\right)^{x_1} L^{y_1} \left(ML^{-3}\right)^{z_1} \left(ML^{-1}t^{-2}\right) = M^0 L^0 t^0 \\ \pi_2 = \left(Lt^{-1}\right)^{x_2} (L)^{y_2} \left(ML^{-3}\right)^{z_2} (L) = M^0 L^0 t^0 \\ \pi_3 = \left(Lt^{-1}\right)^{x_3} (L)^{y_3} \left(ML^{-3}\right)^{z_3} (L) = M^0 L^0 t^0 \\ \pi_4 = \left(Lt^{-1}\right)^{x_4} (L)^{y_4} \left(ML^{-3}\right)^{z_4} \left(ML^{-1}t^{-1}\right) = M^0 L^0 t^0 \end{cases}$$

- $\pi_1 = M^{(z_1+1)} L^{(x_1+y_1-3z_1-1)} t^{(-x_1-2)} = M^0 L^0 t^0$

$$\begin{cases} z_1 + 1 = 0 \\ x_1 + y_1 - 3z_1 - 1 = 0 \\ -x_1 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -1 \\ y_1 = 0 \\ x_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho \langle v \rangle^2}}$$

- $\pi_2 = M^{(z_2)} L^{(x_2+y_2-3z_2+1)} t^{(-x_2)} = M^0 L^0 t^0$

$$\begin{cases} z_2 = 0 \\ x_2 + y_2 - 3z_2 + 1 = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_2 = 0 \\ y_2 = -1 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\pi_2 = \frac{L}{D}}$$

- $\pi_3 = M^{(z_3)} L^{(x_3+y_3-3z_3+1)} t^{(-x_3)} = M^0 L^0 t^0$

$$\begin{cases} z_3 = 0 \\ x_3 + y_3 - 3z_3 + 1 = 0 \\ -x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_3 = 0 \\ y_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\pi_3 = \frac{e}{D}}$$

- $\pi_4 = M^{(z_4+1)} L^{(x_4+y_4-3z_4-1)} t^{(-x_4-1)} = M^0 L^0 t^0$

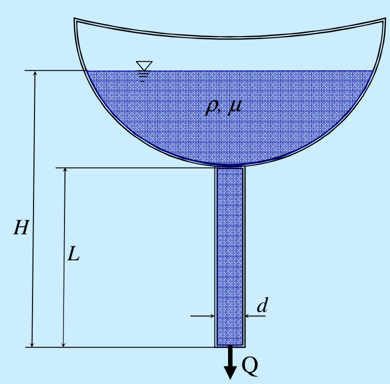
$$\begin{cases} z_4 + 1 = 0 \\ x_4 + y_4 - 3z_4 - 1 = 0 \\ -x_4 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_4 = -1 \\ y_4 = -1 \\ x_4 = -1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\pi_4 = \frac{\mu}{\rho \langle V \rangle D} = \frac{1}{Re}}$$

Relation finale: $$\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3, \pi_4)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\Delta P}{\rho\langle V\rangle^2} = f\left(\frac{L}{D}, \frac{e}{D}, \frac{1}{Re}\right)}$$

Vidange d'un réservoir via une conduite cylindrique verticale

Le liquide s'écoule d'un réservoir à un débit volumique Q. Ce débit dépend du niveau du liquide, h, du diamètre, d, et de la longueur, L, de la conduite, ainsi que de l'accélération gravitationnelle, g.
On vous demande de trouver une relation entre le débit Q et les autres paramètres adimensionnels.



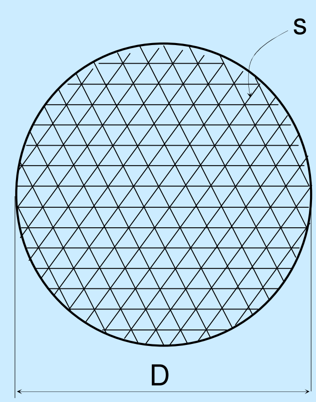
(Résolution en classe)

Inventaire des variables:

Variable	Symbole	Dimensions (MLt)
Débit volumique	Q	
Niveau du liquide	H	
Diamètre_conduite	d	
Longueur_conduite	L	
Viscosité	μ	
Masse volumique	ρ	
Accélération_pesanteur	g	

Écoulement à travers un filtre

Soit un écoulement laminaire visqueux d'un liquide à travers un filtre dont chaque maille a la forme d'un triangle équilatéral de côtés s (voir figure). On vous demande de déterminer, par une analyse dimensionnelle, la forme de l'équation du débit volumique d'un liquide de viscosité dynamique μ qui passe par ce filtre contenant n mailles par unité de surface. On considère qu'il y a une chute de pression par unité de longueur du filtre égale à $\Delta p/L$.



(Résolution en classe)

Inventaire des variables:

Variable	Symbole	Dimensions (MLt)
Débit volumique	Q	
Diamètre_filtre	D	
Perte de charge	$\Delta p/L$	
Viscosité	μ	
Côtés_mailles	s	
Nbre_total_mailles	$n(\pi D^2/4)$	